Signaux aléatoires

Signal déterministe -> $x(t)$ est connu de façon univoque

aléatoire -> $x(t)$ considéré de manière probabilistique

On associe à t une variable aléatoire $X(t)$ dont la densité de proba est $f_{x(t)}(x)$ qui sur l'intervalle

(a, B) s'écrit $P(x \in (a,b)) = \int_a^b f_{x(t)}(x)\, dt$

On peut l'estimer à partir d'un grand nb de tirages au temps t

Deux variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ peuvent être indépendante -> bruit blanc. Elle font partie des statistiques d'ordre $\underline{1}$, caractérisée par une moyenne et un écart type (plutot que par des fonctions de densité de probabilité complètes)

Le plus souvent, il existe des liens de statistiques entre elle. Cette relation est caractérisée par la densité de probabilité conjointe $P_{x(t_1)x(t_2)}(x,y)$ des 2 variables aléatoires. L'ensemble de ces fonctions sont définie par la statistique d'ordre deux.

Fonction d'autocorrélation

C'est la corrélation croisée d'un signal par lui même

⟶ detecter des régularités

⟶ des profils répétés

⟶ des dependances internes

donné par

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1), x^*(t_2)] = \int\int^{\infty} x y^* f(x(t_1) x(t_2))(x,y)\,dx\,dy$$

On suppose les signaux comme ergodiques et stationnaires au sens large (SSL) càd que la statistique d'ordre 1 est independant de l'instant t où on la mesure

$$\cancel{P_{x(t_1)x(t_2)}} \quad P_{x(t_1)}(x) = P_{x(t_2)}(x) = P_x(x)$$

$$m_{x(t_1)} = m_{x(t_2)} = m_x$$

$$\sigma_{x(t_1)} = \sigma_{x(t_2)} = \sigma_x$$

et la stat d'ordre 2 depend que de l'interval $t_2 - t_1$

$$P_{x(t_1)x(t_2)}(x,y) = P_{x(t_1+n)x(t_2+n)}(x,y)$$

$$\longrightarrow \phi_{xx}(t_1, t_2) = \phi_{xx}(t_2 - t_1)$$

Densité spectrale de puissance

(PSD) appelé $S_{xx}(f)$ d'un signal aléa. statio. est la transformée de fourier de sa fct de autocorrélation

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad \omega = 2\pi f.$$

Calculer la PSD à l'aide de la fct d'autocorrel permet d'accéder à une estimation parfaite de celle-ci, mais requiert beaucoup de ressources de calcul (l'intégral)

Bruit blanc

Un bruit blanc est un signal aléa. dont la densité spectrale de puissance est constante, quelle que soit la bande pass qu'on examine

$$S_{xx}(f) = \sigma_x^2$$

-> sa fct de corrélation est une impulsion de Dirac en $t=0$

$$\phi_{xx}(t) = \sigma_x^2\, \delta(t)$$

Ça veut dire qu'un enregistrement d'un bruit blanc n'est pas statistiquement corrélé à un enregistrement de ce même enreg. à un autre moment

Filtrage d'un signal SSL

Clear list :

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\, x(n-i)$$

$$m_y = E[Y(n)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\, E[X(n-i)] = m_x \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)$$

$$\phi_{yy}(l) = E[Y(n)\, Y^*(n-l)]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)\, \phi_{xx}(-l-j+i)$$

en fonction de ϕ_{HH} :

$$\phi_{yy}(l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(l-l)\, \phi_{HH}(l)$$

where $\phi_{HH} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\, h(i-l) = \{h(l)\} * \{h(-l)\}$

where $*$ is convolution

$$S_{HH}(F) = H(F)\, H^*(F) = |H(F)|^2$$

$$S_{yy}(F) = |H(F)|^2\, S_{xx}(F)$$

Estimation de la statistique du second ordre

Tout comme la TFTD, l'autocorr et la DSP supposent des calculs sur un nombre infini d'echantillons.

Statistique de l'estimateur

Il est important de connaitre l'effet d'une troncature à N echantillons sur la qualité de l'estimation (le sign est aléat., les estimateurs aussi (m et σ))

Le periodogramme moyenné (Welsh)

Pour reduire la variance d'un estimateur, il suffit de calculer la moy. de plusieurs estimateurs identiques mais independant. Le signale de durée N est decomposé en L segments de durée M = N/L. Pour ~~que~~ chacun de ces segments, on calcul par FFT un periodogramme