

Signaux aléatoires

Signal déterministique $\rightarrow x(t)$ est connu de façon unique
aléatoire $\rightarrow x(t)$ considérée de manière probabilistique

On associe à t une variable aléatoire $x(t)$ dont
la densité de proba est $f_{x(t)}(x)$ qui sur l'intervalle

$$(a, b) \text{ s'écrit } P(x \in (a, b)) = \int_a^b f_{x(t)}(x) dx$$

On peut l'estimer à partir d'un grand nb de tirages
au temps t

Deux variables aléatoires $x(t_1)$ et $x(t_2)$ peuvent être
indépendantes \rightarrow bruit blanc. Elle font partie des
statistiques d'ordre 1, caractérisée par une moyenne
et un écart type (plutôt que par des fonctions de
densité de probabilité complètes)

Le plus souvent, il existe des liens de statistiques entre
elles. Cette relation est caractérisée par la
densité de probabilité conjointe $P_{x(t_1)x(t_2)}(x, y)$ des
2 variables aléatoires. (l'ensemble de ces fonctions sont
définies par la statistique d'ordre deux).

Fonction d'auto-corrélation

C'est la corrélation croisée d'un signal par lui-même

→ détecter des régularités

→

des profils répétés

→

des dépendances internes

donné par

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E[x(t_1), x^*(t_2)] = \int \int_{-\infty}^{\infty} xy^* f(x(t_1), x(t_2))$$

On suppose les signaux comme ergodiques et

$(x, y) dx dy$

stationnaires au sens large (SSL) c'est que la

statistique d'ordre 1 est indépendante de l'instant t où

on la mesure

$$P_{x(t_1), x(t_2)} P_{x(t_1)}(x) = P_{x(t_2)}(x) = |x(x)$$

$$m_x(t_1) = m_x(t_2) = m_x$$

$$\sigma_x(t_1) = \sigma_x(t_2) = \sigma_x$$

et la stat d'ordre 2 dépend que de l'intervalle $t_2 - t_1$

$$P_{x(t_1), x(t_2)}(x, y) = P_{x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau)}(x, y)$$

$$\rightarrow \phi_{xx}(t_1, t_2) = \phi_{xx}(t_2 - t_1)$$

Densité spectrale de puissance

(PSD) appelé $S_{xx}(f)$ d'un signal alea. statio. est la transformée de Fourier de sa fct de autocorrélation

$$S_{xx}(f) \stackrel{\rightarrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt \quad \omega = 2\pi f.$$

Calculer la DSP à l'aide de la fct d'autocorrélation permet d'accéder à un estimateur parfaite de celle-ci, mais requiert beaucoup de ressources de calcul (l'intégral)

Bruit blanc

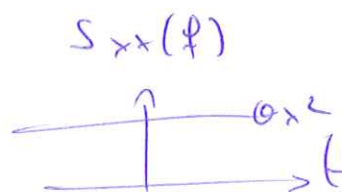
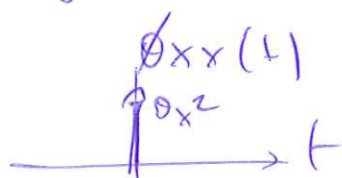
Un bruit blanc est un signal alea. dont la densité spectrale de puissance est constante, quelle que soit la bande pass qui on examine

$$S_{xx}(f) = \sigma_x^2$$

→ sa fct de corrélation est une impulsion de Dirac en $t=0$

$$\phi_{xx}(t) = \sigma_x^2 \delta(t)$$

ça veut dire qu'un enregistrement d'un bruit blanc n'est pas statistiquement corrélé à un enregistrement de ce même enreg. à un autre moment



Filtrage d'un signal SSL

Cheat list:

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) x(n-i)$$

$$m_y = E[Y(n)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) E[X(n-i)] = m_x \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)$$

$$\phi_{yy}(l) = E[Y(n)Y^*(n-l)]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j) \phi_{xx}(-l-j+i)$$

en fonction de ϕ_{HH} :

$$\phi_{yy}(l) = \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(l-l') \phi_{HH}(l')$$

$$\text{where } \phi_{HH} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h(i-l) = \{h(l)\}^* \{h(-l)\}$$

where $*$ is convolution

$$S_{HH}(F) = H(F)H^*(F) = |H(F)|^2$$

$$S_{YY}(F) = |H(F)|^2 S_{XX}(F)$$

Estimation de la statistique du second ordre

Tout comme la TFD, l'autocorrélation et la DSP s'appuient sur des calculs sur un nombre infini d'échantillons.

Statistique de l'estimation

Il est important de connaître l'effet d'une tronçonnage à N échantillons sur la qualité de l'estimation (le signal est aléatoire, les estimateurs aussi (m et σ)).

Le periodogramme moyenné (Welch)

Pour réduire la variance d'une estimation, il suffit de calculer la moy. de plusieurs estimateurs identiques mais indépendants. Le signal de durée N est décomposé en L segments de durée $M = N/L$. Pour chaque segment, on calcule par FFT un periodogramme.