Chap 4 - Traitement du signal - DFT et FFT

Fourier series

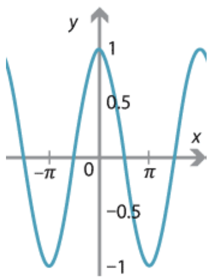
Tout signal non periodique peut être écrit sous forme de somme de sinusoïdes

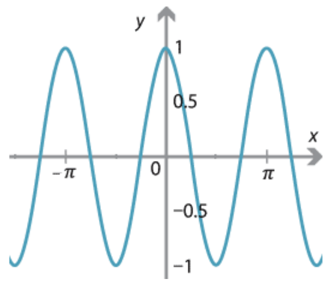
$$x(t+T) = x(t)$$

Quels signaux ont une periode T ?

- Cosinus :

Si on prend $\cos \omega_o t = \cos \frac{2\pi}{T} t$ ou $cos 2\omega_o t = \cos \frac{4\pi}{T} t$
$\rightarrow \cos K\omega_o t$, K est un entier





- Signal complex $e^{jK\omega_o t}$:

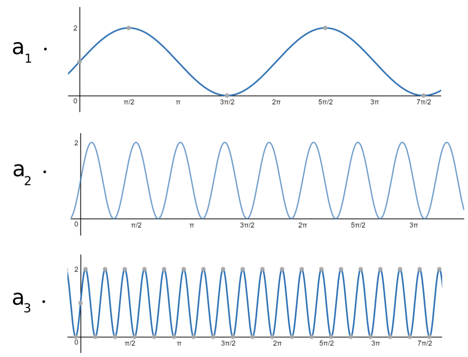
Grâce à la formule d'Euler, nous avons :

$$e^{jK\omega_o t} = \cos K\omega_o t + j \sin K\omega_o t$$

Similairement :

$$\sum_{K=-\inf}^{\inf} a_k e^{jK\omega_o t}$$

est aussi périodique avec la période T En effet, les coefficients a_k change l'amplitude, mais pas la période. On aurait alors un calcul du genre :



Le but est de représenter notre signal tel que :

$$x(t) = \sum_{K=-\inf}^{\inf} a_k e^{jK\omega_o t}$$

La série de $\{a_k\}$ s'appelle la série de fourier.
Comment trouver les $\{a_k\}$? Il faut intégrer les deux côtés :

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jK\omega_o t} dt$$

Si on veut se débarasser du complexe j et rester dans les réels, il faut deux opérations :

$$a_{k_1} = \int x(t) \cos^{K\omega_o t} dt \qquad a_{k_2} = \int x(t) \sin^{K\omega_o t} dt$$

<u>Transformée de Fourier discrète</u>

SIgnal	Continu	Discret
Périodique	FS	DFT / FFT
Apériodique	FT	DTFT

FS :

$$x(t) = \sum_{K=-\inf}^{\inf} x(k) e^{jK\frac{2\pi}{T}t}, \frac{2\pi}{T}\text{est la fréquence fondamentale}$$

Si x(t) oscille de manière infiniment rapide, alors il faut un nombre infini de terme $x(k)$. Essayons d'adapter la formule pour un signal discret $x(n)$, essayons:

$$x(n) = \sum_{K=-\inf}^{\inf} x(k) e^{jK\frac{2\pi}{N}n}, n = 0, 1, \ldots, N-1$$

La formule n'est pas bonne (additionner un nombre infini de valeurs pour un signal discret...), mais l'idée est là.

Regardons de plus près l'exponentielle $e^{jK\frac{2\pi}{N}n}$ et ajoutons lui le nombre N:

$$e^{jK\frac{2\pi}{N}(n+N)} = e^{jK\frac{2\pi}{N}n}e^{jK2\pi}$$

k est un entier et donc le deuxième terme vaut toujours 1, donc :

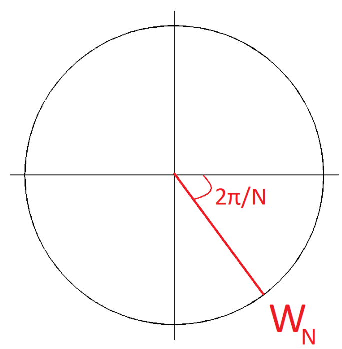
$$e^{jK\frac{2\pi}{N}(n+N)} = e^{jK\frac{2\pi}{N}n}$$

Et cela nous dit qu'il n'y a que N uniques complexes de periode N.

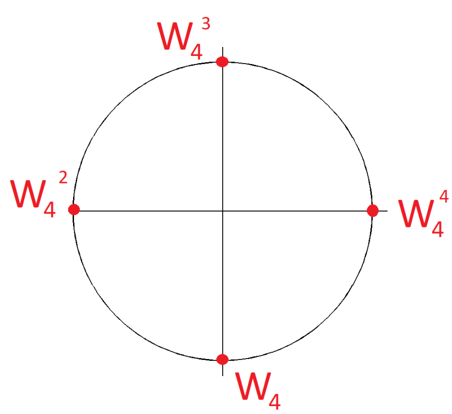
$$\rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jK\frac{2\pi}{N}n}, k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Cette dernière équation est la transformée de fourier discrète.

Posons par facilité de notation $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ et regardons ce terme de plus près :



On peut en déduire que W_N est la racine N de $1 \rightarrow (W_N)^N$
Pourquoi c'est vrai ? Prenons N = 4 échantillons :



En effet, W_4 est un nombre complexe de magnitude 1, et pour w_4^2 on double l'angle, etc. Nous avons donc les quatres racines 4 de 1 ($\mathcal{Z}^4 = 1$) :

$W_4 = e^{\frac{-2\pi j}{4}} = e^{\frac{-\pi j}{2}} \to W_4^4 = e^{-2\pi j}$
$W_4^2 = e^{-\pi j} \to W_4^{2^4} = e^{-4\pi j}$
$W_4^3 = e^{\frac{-3\pi j}{2}} \to W_4^{3^4} = e^{-6\pi j}$
$W_4^4 = e^{-2\pi j} \to W_4^{4^4} = e^{-8\pi j}$

Ceci constitue l'interprétation géometrique

Lien avec la DTFT :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\inf}^{\inf} x[n]e^{j\omega n}, \omega \in [-\pi, \pi]$$

On obtient donc une fonction continue de ω et periodique. On peut cependant simplifier car on a une entrée périodique de N valeur :

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\omega n}$$

Les deux formules (DTFT et DFT) se ressemblent, cela revient a dire qu'on évalue $X(\omega)$ à $\frac{k2\pi}{N}$. On va avoir N valeurs de la DFT espacés de cette manière :